Informatique Appliquée au Calcul Scientifique 2

Séance 11

Interpolation de Lagrange et de Hermite

Table des matières

I. Interpolation de Lagrange

I.1. Principe

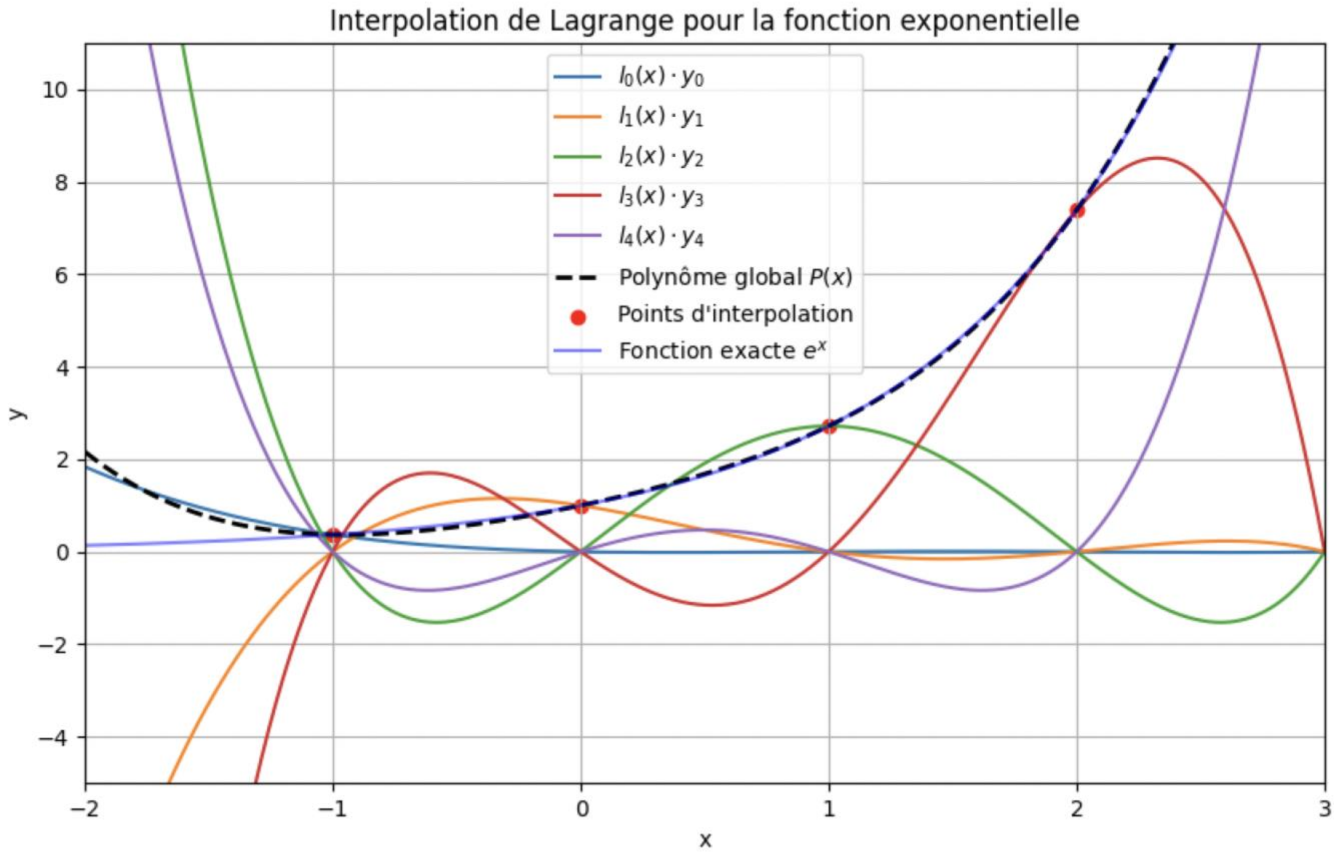
L'objectif de l'interpolation est de remplacer une fonction difficile à calculer par une expression plus simple pour, par exemple, pouvoir la calculer numériquement, ou pour évaluer sa dérivée ou son intégrale.
L'interpolation de Lagrange est une méthode qui permet de trouver un polynôme de degré n passant par $n+1$ points distincts $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

Le polynôme de Lagrange $P(x)$ est donné par :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . l_i(x)$$

où les fonctions de bases $l_i(x)$ sont définies comme :

$$l_i(x) = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$



Voici ce que l'on obtient dans l'interpolation de la fonction e^x en passant par les points d'abscisses -1, 0, 1 et 2.
On remarque que les $y_i . l_i(x)$ passent chacun par un pivot et un seul alors que le polynôme d'interpolation passe par tous les pivots.

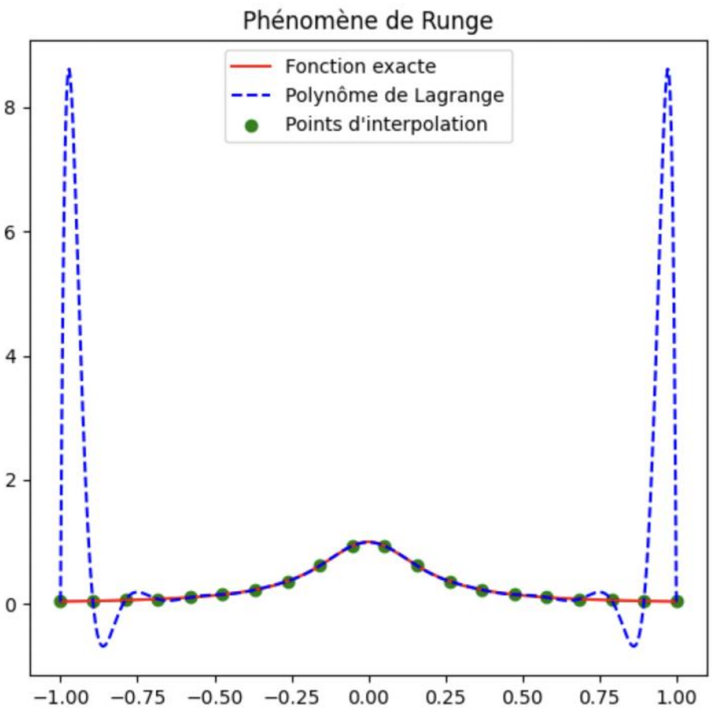
I.2. Erreur commise

Soit $f(x)$ une fonction continue de classe C^{n+1} sur $[a,b]$ (fonction n+1 dérivable les dérivées sont continues) et $P(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n construit à partir de $n+1$ points distincts x_0, $x_1, \dots, x_n$ (inclus dans $[a,b]$) et passant par les points $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$.
Alors, il existe $\xi \in [a,b]$ tel que :

$$R(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Si le nombre de points n est petit, l'erreur est généralement plus grande car le polynôme d'interpolation est moins capable de capturer les variations de $f(x)$.

Si le nombre de points n est trop grand, le phénomène de Runge peut apparaître. Ce phénomène se produit lorsque l'erreur d'interpolation augmente de manière significative aux bords de l'intervalle en raison de l'oscillation du polynôme d'interpolation.



Phénomène de Runge sur la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+25x^2}$ avec 20 points

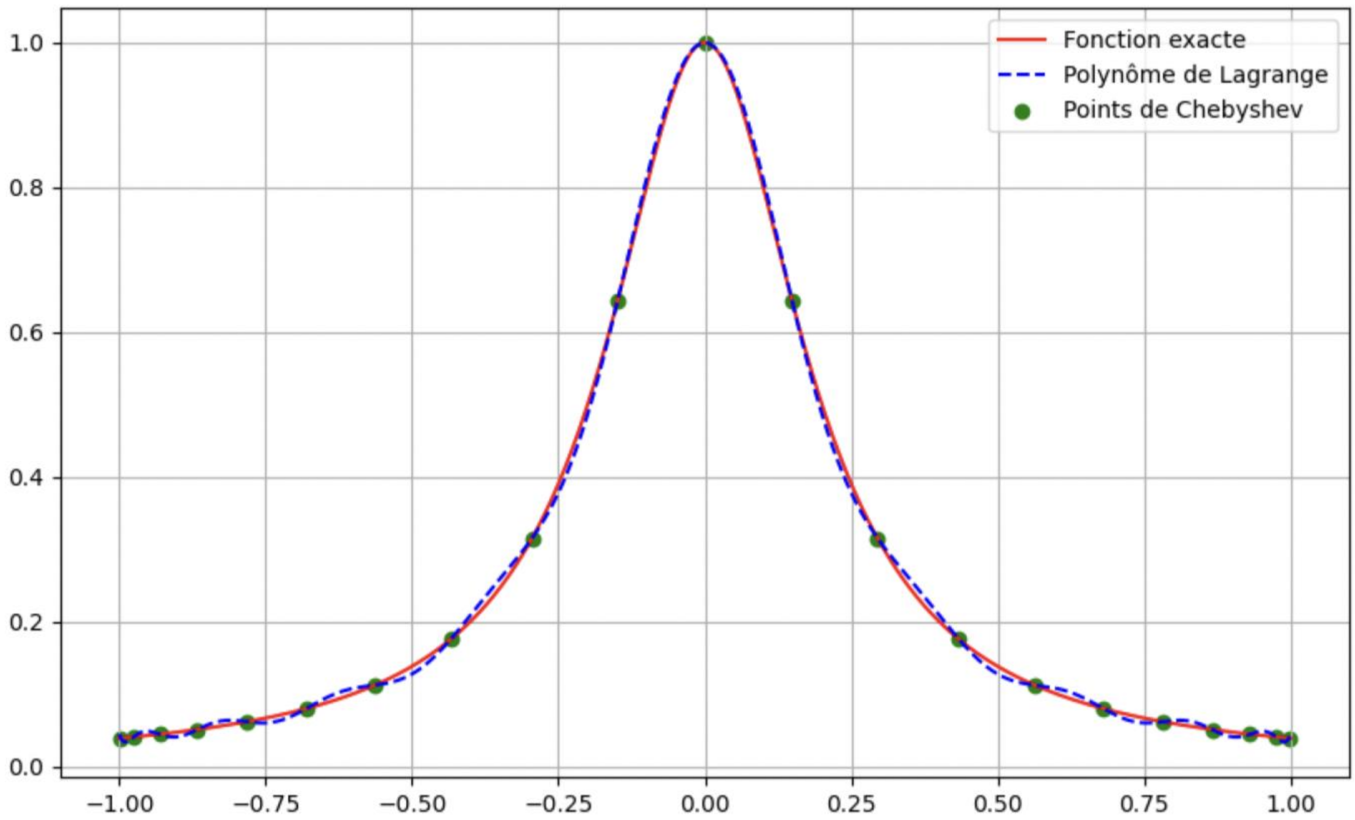
I.3. Comment choisir les points ?

Comme nous l'avons vu au-dessus, pour des points uniformément répartis, l'erreur peut être grande au bord de l'intervalle, surtout avec un nombre de points élevés.
Pour minimiser l'erreur d'interpolation, on peut choisir des points de Tchebyshev. Ces points sont plus concentrés aux bords de l'intervalle et réduisent l'oscillation du polynôme, ce qui diminue l'erreur.
Les points de Tchebychev sont définis sur l'intervalle $[-1,1]$ comme suit :

$$x_i = cos(\frac{(2i-1)\pi}{2n}), i = 1, \dots, n$$

On peut facilement généraliser ces points à tout intervalle $[a,b]$ à l'aide de translation et d'une homothétie :

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} cos(\frac{(2i-1)\pi}{2n}), i = 1, \dots, n$$



Utilisation des points de Tchebytchev sur la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+25x^2}$ *avec 20 points*

II. Interpolation de Hermite

L'interpolation d'Hermite est une extension de l'interpolation de Lagrange qui prend en compte non seulement les valeurs de la fonction à certains points, mais également les dérivées en ces points. C'est particulièrement utile lorsque nous connaissons la pente de la fonction aux points donnés.
Cela nous permettra d'éviter les phénomènes de Runge comme vu plus haut.

II.1. Principe

Nous voulons déterminer le polynôme d'interpolation de Hermite qui vérifie les critères suivants :

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f(x_1) = y_1 \\ f(x_2) = y_2 \end{cases} \; et \; \begin{cases} f'(x_0) = y_0' \\ f'(x_1) = y_1' \\ f'(x_2) = y_2' \end{cases}$$

On voit que nous avons 6 paramètres, ce qui fait que nous allons chercher un polynôme de degré 5.
Pour $2n + 2$ paramètres, ce sera un polynôme de degré $2n + 1$.

Nous allons d'abord chercher le polynôme $H_0(x)$ tel que :

$$\begin{cases} H_0(x_0) = 1 \\ H_0(x_1) = 0 \\ H_0(x_2) = 0 \end{cases} \; et \; \begin{cases} H_0'(x_0) = 0 \\ H_0'(x_1) = 0 \\ H_0'(x_2) = 0 \end{cases}$$

Avec les conditions : $H_0(x_1) = 0, H_0(x_2) = 0, H_0'(x_1) = 0, H_0'(x_2) = 0$, on peut dire que $H_0(x)$ aura $(x - x_1)^2(x - x_2)^2$ comme facteur.

En rajoutant la condition $H_0(x_0) = 1$, il devient :

$$\frac{(x - x_1)^2(x - x_2)^2}{(x_0 - x_1)^2(x_0 - x_2)^2} = l_0^2(x)$$

Il nous reste une condition à satisfaire : $H_0'(x_0) = 0$.
Cela veut dire que l'on pourra écrire : $H_0(x) = l_0^2(x)(a(x - x_0) + b)$ et on aura notre polynôme de degré 5.
Comme $H_0(x_0) = 1$, on a $H_0(x_0) = l_0^2(x_0)(a(x_0 - x_0) + b) = 1.b = b = 1$.
Ainsi :

$$H_0(x) = l_0^2(x)(a(x - x_0) + 1)$$

Calculons maintenant $H_0'(x)$ pour utiliser notre dernière condition :

$$H_0'(x) = 2l_0'(x).l_0(x)(a(x - x_0) + 1) + al_0^2(x)$$

$$H_0'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2l_0'(x_0).l_0(x_0)(a(x_0 - x_0) + 1) + al_0^2(x_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2l_0'(x_0) + a = 0 \Leftrightarrow a = -2l_0'(x_0)$$

On a donc trouvé que :

$$H_0(x) = l_0^2(x)(-2l_0'(x_0)(x - x_0) + 1)$$

On peut de même chercher le polynôme $H_1(x)$ tel que :

$$\begin{cases} H_0(x_0) = 0 \\ H_0(x_1) = 1 \\ H_0(x_2) = 0 \end{cases} et \begin{cases} H_0'(x_0) = 0 \\ H_0'(x_1) = 0 \\ H_0'(x_2) = 0 \end{cases}$$

qui nous donnera avec un raisonnement similaire :

$$H_1(x) = l_1^2(x)(-2l_1'(x_1)(x - x_1) + 1)$$

Et aussi $H_2(x)$ tel que :

$$\begin{cases} H_0(x_0) = 0 \\ H_0(x_1) = 0 \\ H_0(x_2) = 1 \end{cases} et \begin{cases} H_0'(x_0) = 0 \\ H_0'(x_1) = 0 \\ H_0'(x_2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow H_2(x) = l_2^2(x)(-2l_2'(x_2)(x - x_2) + 1)$$

Ainsi, si nous cherchons un polynôme $P(x)$ tel que :

$$\begin{cases} P(x_0) = 1 \\ P(x_1) = 1 \\ P(x_2) = 1 \end{cases} et \begin{cases} P'(x_0) = 0 \\ P'(x_1) = 0 \\ P'(x_2) = 0 \end{cases}$$

alors, il sera de la forme :

$$P(x) = H_0(x) + H_1(x) + H_2(x)$$

Et si nous voulons :

$$\begin{cases} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ P(x_2) = y_2 \end{cases} \; et \; \begin{cases} P'(x_0) = 0 \\ P'(x_1) = 0 \\ P'(x_2) = 0 \end{cases}$$

alors,

$$P(x) = y_0.H_0(x) + y_1.H_1(x) + y_2.H_2(x)$$

Désormais, occupons-nous des conditions aux dérivées.
Cherchons un polynôme $k_0(x)$ tel que :

$$\begin{cases} k_0(x_0) = 0 \\ k_0(x_1) = 0 \\ k_0(x_2) = 0 \end{cases} \; et \; \begin{cases} k_0'(x_0) = 1 \\ k_0'(x_1) = 0 \\ k_0'(x_2) = 0 \end{cases}$$

Le degré de k_0 est de 5.
Avec les conditions $k_0(x_0) = 0, k_0(x_1) = 0, k_0(x_2) = 0, k_0'(x_1) = 0, k_0'(x_2) = 0$, notre polynôme aura comme facteur : $(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)^2$ qui est de degré 5…

Rajoutons la conditions $k_0'(x_0) = 1$. On peut écrire que $k_0(x) = C(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)^2$.
Cherchons C.

$$k_0'(x) = C[(x - x_1)^2(x - x_2)^2 + 2((x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)^2 + 2(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)]$$

Et donc :

$$k_0'(x_0) = C(x_0 - x_1)^2(x_0 - x_2)^2 = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{(x_0 - x_1)^2(x_0 - x_2)^2}$$

On a alors :

$$k_0(x) = \frac{(x - x_1)^2(x - x_2)^2}{(x_0 - x_1)^2(x_0 - x_2)^2}(x - x_0) = l_0^2(x)(x - x_0)$$

Vous comprenez que nous allons faire de même pour $k_1(x)$ et $k_2(x)$:

$$\begin{cases} k_1(x_0) = 0 \\ k_1(x_1) = 0 \\ k_1(x_2) = 0 \end{cases} et \begin{cases} k_1'(x_0) = 0 \\ k_1'(x_1) = 1 \\ k_1'(x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1(x) = l_1^2(x)(x - x_1)$$

$$\begin{cases} k_2(x_0) = 0 \\ k_2(x_1) = 0 \\ k_2(x_2) = 0 \end{cases} et \begin{cases} k_2'(x_0) = 0 \\ k_2'(x_1) = 0 \\ k_2'(x_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow k_2(x) = l_2^2(x)(x - x_2)$$

Ainsi, si nous cherchons un polynôme $Q(x)$ tel que :

$$\begin{cases} Q(x_0) = 0 \\ Q(x_1) = 0 \\ Q(x_2) = 0 \end{cases} et \begin{cases} Q'(x_0) = 1 \\ Q'(x_1) = 1 \\ Q'(x_2) = 1 \end{cases}$$

alors,

$$Q(x) = k_0(x) + k_1(x) + k_2(x)$$

Et si nous voulons :

$$\begin{cases} Q(x_0) = 0 \\ Q(x_1) = 0 \\ Q(x_2) = 0 \end{cases} et \begin{cases} Q'(x_0) = y_0' \\ Q'(x_1) = y_1' \\ Q'(x_2) = y_2' \end{cases}$$

Alors on a :

$$Q(x) = y_0'.k_0(x) + y_1'.k_1(x) + y_2'.k_2(x)$$

Et si nous revenons maintenant à notre problème premier :

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f(x_1) = y_1 \\ f(x_2) = y_2 \end{cases} et \begin{cases} f'(x_0) = y_0' \\ f'(x_1) = y_1' \\ f'(x_2) = y_2' \end{cases}$$

On peut dire :

$$f(x) = P(x) + Q(x) = y_0.H_0(x) + y_1.H_1(x) + y_2.H_2(x) + y_0'.k_0(x) + y_1'.k_1(x) + y_2'.k_2(x)$$

II.2. Généralisation

Le polynôme de Hermite $H(x)$ pour les points $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ avec les dérivées $f'(x_0) = y'_0, f'(x_1) = y'_1, \dots, f'(x_n) = y'_n$ est donné par :

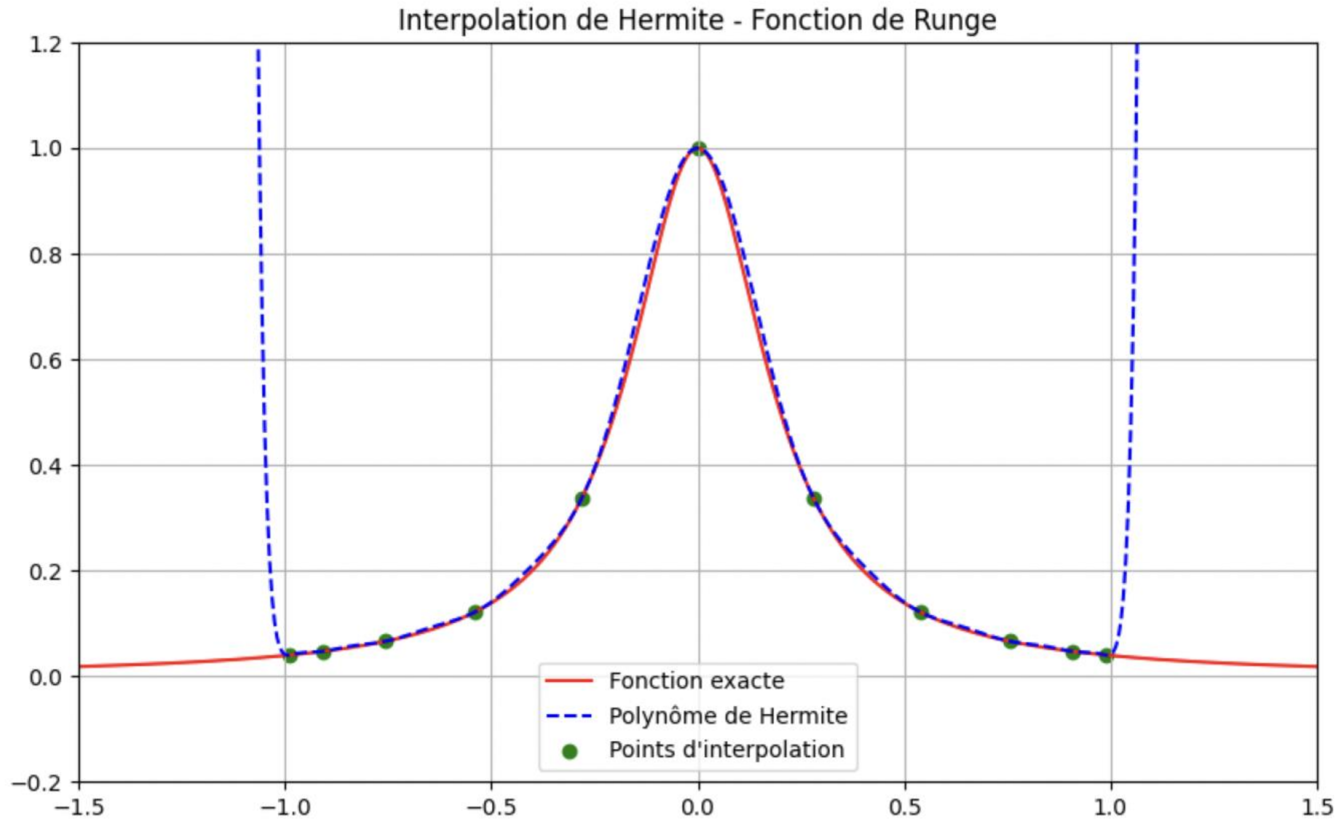
$$H(x) = \sum_{i=0}^{n} h_i(x)y_i + h'_i(x)y'_i$$

où $h_i(x)$ et $h'_i(x)$ sont des polynômes définis pour que $H(x)$ passe par les points donnés avec les dérivées spécifiées.

$$h_i(x) = l_i^2(x)(1 - 2l_i'(x_i)(x - x_i)) \quad et \quad h'_i(x) = l_i^2(x)(x - x_i)$$

On rappelle :

$$l_i(x) = \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \qquad et \qquad l_i'(x) = \sum_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}$$



III. TP7 : Interpolation de Lagrange et de Hermite

Vous allez chercher à interpoler la fonction de Runge sur [-1, 1] définie par : $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$.

1. À l'aide 10 points judicieusement choisi, faire une interpolation de Lagrange de cette fonction grâce au langage Python. Vous créerez une fonction Python prenant comme arguments la fonction et les coordonnées des points.

2. À l'aide 10 points judicieusement choisi, faire une interpolation de Hermite de cette fonction. Vous connaissez les $f(x_i)$ et les $f'(x_i)$ dans ce cas. Grâce au langage Python, vous créerez une fonction Python prenant comme arguments la fonction et les coordonnées des points.